音乐中的数学

黄力民

一

音乐中的 1，2，3 并不是数字而是专门的记号，唱出来是 do, re, mi，它来源于中世纪意大利一首赞美诗中前七句每一句句首的第一个音节。而音乐的历史像语言的历史一样悠久，其渊源已不可考证。但令人惊异的是我们可以运用数学知识来解释音乐的许多规则其中包括音乐基本元素——乐音的构成原理，也就是说 1，2，3……这些记号确实有着数字或数学的背景。

学习音乐总是从音阶开始，我们常见的音阶由 7 个基本的音组成：

1，2，3，4，5，6，7

或用唱名表示即

do, re, mi, fa, so, la, si

用 7 个音以及比它们高一个或几个八度的音、低一个或几个八度的音做成各种组合就是“曲调”。

美国著名音乐理论家珀西·该丘斯（Percy Goetschius，1853-1943）说“对于求知心切的音乐学习者与音乐爱好者，再没有像‘音阶’似的音乐要素，即刻而又持久地引起他们的好奇心与惊异的了”。

7 音音阶按“高度”自低向高排列，要搞清音阶的原理，首先须知道什么是音的“高度”？音与音之间的“高度”差是多少？

物体发生振动时产生声音，振动的强弱（能量的大小）体现为声音的大小，不同物体的振动体现为声音音色的不同，而振动的快慢就体现为声音的高低。

振动的快慢在物理学上用频率表示，频率定义为每秒钟物体振动的次数，用每秒振动 1 次作为频率的单位称为赫兹。频率为 261.63 赫兹的音在音乐里用字母 c^1 表示。相应地音阶表示为

c, d, e, f, g, a, b

在将 C 音唱成“do”时称为 C 调。

频率过高或过低的声音人耳不能感知或感觉不舒服，音乐中常使用的频率范围大约是 16~4000 赫兹，而人声及器乐中最富于表现力的频率范围大约是 60~1000 赫兹。

在弦乐器上拨动一根空弦，它发出某个频率的声音，如果要求你唱出这个音你怎能知道你的声带振动频率与空弦振动频率完全相等呢？这就需要“共鸣原理”：当两种振动的频率相等时合成的效果得到最大的加强而没有丝毫的减弱。因此你应当通过体验与感悟去调整你的声带振动频率使声带振动与空弦振动发生共鸣，此时声带振动频率等于空弦振动频率。

人们很早就发现，一根空弦所发出的声音与同一根空弦但长度减半后发出的声音有非常和谐的效果，或者说接近于“共鸣”，后来这两个音被称为具有八度音的关系。我们可以用“如影随形”来形容一对八度音，除非两音频率完全相等的情形，八度音是在听觉和谐方面关系最密切的音。

18 世纪初英国数学家泰勒（Taylor，1685-1731）获得弦振动频率 f 的计算公式：

$$f=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

l 表示弦的长度、T 表示弦的张紧程度、ρ 表示弦的密度。

这表明对于同一根弦（材质、粗细相同）频率与弦的长度成反比，一对八度音的频率之比等于 2：1。

现在我们可以描述音与音之间的高度差了：假定一根空弦发出的音是 do，则二分之一长度的弦发出高八度的 do；8/9 长度的弦发出 re，64/81 长度的弦发出 mi，3/4 长度的弦发出 fa，2/3 长度的弦发出 so，16/27 长度的弦发出 la，128/243 长度的弦发出 si 等等类推。例如高八度的 so 应由 2/3 长度的弦的一半就是 1/3 长度的弦发出。

为了方便将 c 音的频率算作一个单位，高八度的 c 音的频率就是两个单位，而 re 音的频率是 9/8 个单位，将音名与各自的频率列成下表：

表一：

音名	C	D	E	F	G	A	B	C
频率	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

知道了 do, re, mi, fa, so, la, si 的数字关系之后，新的问题是为什么要用具有这些频率的音来构成音阶？实际上首先更应回答的问题是为什么要用 7 个音来构成音阶？

这可是一个千古之谜，由于无法从逝去的历史进行考证，古今中外便有形形色色的推断、臆测，例如西方文化的一种说法基于“7”这个数字的神秘色彩，认为运行于天穹的 7 大行星（这是在只知道有 7 个行星的年代）发出不同的声音组成音阶。我们将从数学上揭开谜底。

我们用不同的音组合成曲调，当然要考虑这些音放在一起是不是很和谐，前面已谈到八度音是在听觉和谐效果上关系最密切的音，但是仅用八度音不能构成动听的曲调——至少它们太少了，例如在音乐频率范围内 c^1 与 c^1 的八度音只有如下的 8 个：C_2（16.35 赫兹）、C_1（32.7 赫兹）、C（65.4 赫兹）、c（130.8 赫兹）、c^1（261.6 赫兹）、c^2（523.2 赫兹）、c^3（1046.4 赫兹）、c^4（2092.8 赫兹），对于人声就只有 C、c、c^1、c^2 这 4 个音了。

为了产生新的和谐音，回顾一下前面说的一对八度音和谐的理由是近似于共鸣。数学理论告诉我们：每个音都可分解为由一次谐波与一系列整数倍频率谐波的叠加。仍然假定 c 的频率是 1 ，那么它分解为频率为 1，2，4，8，...的谐波的叠加，高八度的 c 音的频率是 2，它分解为频率为 2，4，8，16，...的谐波的叠加，这两列谐波的频率几乎相同，这是一对八度音近似于共鸣的数学解释。由此可推出一个原理：两音的频率比若是简单的整数关系则两音具有和谐的关系，因为每个音都可分解为由一次谐波与一系列整数倍谐波的叠加，两音的频率比愈是简单的整数关系意味着对应的两个谐波列含有相同频率的谐波愈多。

次于 2∶1 的简单整数比是 3∶2。试一试，一根空弦发出的音（假定是表 1 的 C，且作为 do）与 2/3 长度的弦发出的音无论先后奏出或同时奏出其效果都很和谐。可以推想当古人发现这一现象时一定非常兴奋，事实上我们比古人更有理由兴奋，因为我们明白了其中的数学道理。接下来，奏出 3/2 长度弦发出的音也是和谐的。它的频率是 C 频率的 2/3，已经低于 C 音的频率，为了便于在八度内考察，用它的高八度音即频率是 C 的 4/3 的音代替。很显然我们已经得到了表 1 中的 G（so）与 F（fa）。

问题是我们并不能这样一直做下去，否则得到的将是无数多音而不是 7 个音！

如果从 C 开始依次用频率比 3∶2 制出新的音，在某一次新的音恰好是 C 的高若干个八度音，那么再往后就不会产生新的音了。很可惜，数学可以证明这是不可能的，因为没有自然数 m、n 会使下式成立：

$$(3/2)^m = 2^n$$

此时，理性思维的自然发展是可不可以成立近似等式？经过计算有 $(3/2)^5 = 7.594 \approx 2^3 = 8$，因此认为与 1 之比是 2^3 即高三个八度关系算作是同一音，而 $(3/2)^6$ 与 $(3/2)^1$ 之比也是 2^3 即高三个八度关系等等也算作是同一音。在“八度相同”的意义上说，总共只有 5 个音，他们的频率是：

$$1, (3/2), (3/2)^2, (3/2)^3, (3/2)^4 \qquad (1)$$

折合到八度之内就是：

1, 9/8, 81/64, 3/2, 27/16

对照表 1 知道这 5 个音是 C（do）、D（re）、E（mi）、G（so）、A（la），这是所谓五声音阶，它在世界各民族的音乐文化中用得不是很广，不过我们熟悉的“卖报歌”就是用五声音阶作成。

接下来根据 $(3/2)^7 = 17.09 \approx 2^4 = 16$，总共应由 7 个音组成音阶，我们在 (1) 的基础上用 3∶2 的频率比上行一次、下行一次得到由 7 个音组成的音列，其频率是

$$(2/3), 1, (3/2), (3/2)^2, (3/2)^3, (3/2)^4, (3/2)^5$$

折合到八度之内就是：

1, 9/8, 81/64, 4/3, 3/2, 27/16, 243/128

得到常见的五度律七声音阶大调式如表一。

考察一下音阶中相邻两音的频率之比，通过计算知道只有两种情况：do-re、re-mi、fa-so、so-la、la-si 频率之比是 9∶8，称为全音关系；mi-fa、si-do 频率之比是 256∶243，称为半音关系。

以 2∶1 与 3∶2 的频率比关系产生和谐音的法则称为五度律。在中国，五度律最早的文字记载见于典籍《管子》的《地员篇》，由于《管子》的成书时间跨度很大，学术界一般认为五度律产生于公元前 7 世纪至公元前 3 世纪。西方学者认为是公元前 6 世纪古希腊的毕达哥拉斯学派最早提出了五度律。

根据近似等式 $(3/2)^{12} = 129.7 \approx 2^7 = 128$ 并仿照以上方法又可制出五度律十二声音阶如下：

表二：

音名	C	$^{\#}$C	D	$^{\#}$D	E	F	$^{\#}$F
频率	1	$(3^7)/(2^{11})$	$(3^2)/(2^3)$	$(3^9)/(2^{14})$	$(3^4)/(2^6)$	$(2^2)/(3)$	$(3^6)/(2^9)$

音名	G	$^{\#}G$	A	$^{\#}A$	B	C	
频率	3/2	$(3^8)/(2^{12})$	$(3^3)/(2^4)$	$(3^{10})/(2^{15})$	$(3^5)/(2^7)$	2	

五度律十二声音阶相邻两音的频率之比有两种：256：243 与 2187：2048，分别称为自然半音与变化半音。从表中可看到，音名不同的两音例如 #C-D 的关系是自然半音，音名相同的两音例如 C-#C 的关系是变化半音。

人类历史进程中，某种音乐文化的发生不可能限于一时或一地，但五度律几乎同时在东西方出现，毕竟表明了人类艺术禀赋的贯通。

三

五度律以外的形形色色的乐律中应用最广的是十二平均律与纯律。

十二平均律—— 人们注意到五度律十二声音阶中的两种半音相差不大，如果消除这种差别对于键盘乐器的转调将是十分方便的，因为键盘乐器的每个键的音高是固定的，而不象拨弦或拉弦乐器的音高由手指位置决定。消除两种半音差别的办法是使相邻各音频率之比相等，这是一道中学生的数学题——在 1 与 2 之间插入 11 个数使它们组成等比数列，显然其公比就是$\sqrt[12]{2}$，并且有如下的不等式

$$1.05350 = 256 / 243 < \sqrt[12]{2} = 1.05946 < 2187 / 2048 = 1.06787$$

这样获得的是十二平均律，它的任何相邻两音频率之比都是$\sqrt[12]{2}$，没有自然半音与变化半音之分。

用十二平均律构成的七声音阶如下：

表三：

音名	C	D	E	F	G	A	B	C
频率	1	$(\sqrt[12]{2})^2$	$(\sqrt[12]{2})^4$	$(\sqrt[12]{2})^5$	$(\sqrt[12]{2})^7$	$(\sqrt[12]{2})^9$	$(\sqrt[12]{2})^{11}$	2

同五度律七声音阶一样，C-D、D-E、F-G、G-A、A-B 是全音关系，E-F、B-C 是半音关系，但它的全音恰好等于两个半音。

十二平均律既是对五度律的借鉴又是对五度律的反叛。

十二平均律的出现表明无理数进入了音乐，这是一件令人惊异的事。无理数是数学中一大怪物，当今一个非数学专业的大学生在学完大学数学之后仍然不明白无理数是什么，数学家使用无理数已有 2500 多年也直到 19 世纪末才真正认识无理数。音乐家似乎不在乎无理数的艰深，轻易地将高雅音乐贴上了无理数的标签。

十二平均律的出现还使得我们在前面推出的和谐性原理——两音的频率比愈是简单的整数关系则两音愈具有和谐的关系——不再成立。不过不必为此而沮丧，因为本质上说艺术行为不是一定要服从科学道理的。正如符合黄金分割原理的绘画是艺术，反其道而行之的绘画也是艺术。

历史资料记载中的十二平均律发明者在欧洲是荷兰人斯特芬（Stevin 约 1548 - 约 1620），他于 1600 年前后用两音频率比 严格地确立了十二平均律；在中国是明代科学家、音乐家朱载堉（1536 - 1612），他表述的十二平均律甚至将 $\sqrt[12]{2}$ 及各次幂均计算到小数点后 24 位（约完成于 1581 年前）。十二平均律的确立是人类艺术禀赋的贯通性在音乐文化方面的又一惊人表现。

纯律——五度律七声音阶的 1、3、5（do、mi、so）三音的频率之比是 1：81/64：3/2，即 64：81：96，纯律将这修改为 1： 5/4： 3/2，即 64：80：96 或 4：5：6，使大三和弦 1-3-5 三音间的频率之比更显简单。然后按 1： 5/ 4：3/2 的频率比从 5(so)音上行复制两音 7、$\dot{2}$，从 1(do)音下行复制两音 $\underset{\cdot}{6}$、$\underset{\cdot}{4}$，即 $\underset{\cdot}{4}$、$\underset{\cdot}{6}$、1、3、5、7、$\dot{2}$的频率之比是

$$(2/3) : (5/4)(2/3) : 1 : (5/4) : 3/2 : (5/4)(3/2) : (3/2)^2$$

共得 7 个音折合到八度之内构成纯律七声音阶：

表四：

音名	C	D	E	F	G	A	B	C
频率	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

它与五度律七声音阶比较（表一），有 4 个音 C、D、F、G 使相同的，有 3 个音 E、A、B 不同。

在相邻两音的频率比方面，纯律七声音阶有 3 种关系：9：8、10：9、16：15。从数字看，它比五度律七声音阶简单，然而种类却比五度律七声音阶多（五度律七声音阶只有 2 种相邻两音的频率比）。在艺术上孰好孰坏，已不是数学所能判断的了。

纯律发轫于古希腊时期，13 世纪末叶由英国人奥丁汤（Odington，1248 - 1316）正式确立。